Esponenziale complesso

Di Cristiano Armellini (cristiano.armellini@alice.it)

Per la formula di Eulero:

$$e^{i\propto} = \cos(\propto) + isen(\propto)$$

$$a^{i} = e^{\log(a^{i})} = e^{i\log(a)}$$

$$a^{m+ni} = a^{m}a^{in} = a^{m}(a^{i})^{n} = a^{m}(e^{i\log(a)})^{n}$$

E applicando la formula di de Moivre, dopo le opportune semplificazioni:

$$a^{m+in} = a^{m}[\cos(\log(a) + isen(\log(a)]^{n} = a^{m}[\cos(n\log(a)) + isen(n\log(a))]$$

Analogamente:

$$e^{-i\propto} = \cos(\propto) - isen(\propto)$$

$$a^{m-ni} = a^{m}a^{-in} = a^{m}\left(e^{i\log(a)}\right)^{-n}$$

$$a^{m-in} = a^{m}[\cos(\log(a) + isen(\log(a)]^{-n} = a^{m}[\cos(n\log(a)) - isen(n\log(a))]$$

Nel caso generale

$$(a+ib)^{m+in} = e^{(m+in)\log(x+iy)}$$

Dato che il logaritmo di un numero complesso è un numero complesso

$$\log\left(\rho e^{i\vartheta}\right) = \log(\rho) + i\vartheta + 2k\pi i, k = intero$$

Ove $z = \rho e^{i\vartheta} = \rho\left(\cos(\vartheta) + isen(\vartheta)\right) = x + iy, \rho\cos(\vartheta) = x, \rho sen(\vartheta) = y, sen^2(\vartheta) + cos^2(\vartheta) = 1$

Ci si riduce al caso già visto prima perché:

$$e^{\rho[\cos(\vartheta)+isen(\vartheta)]} = e^{\rho\cos(\vartheta)}[\cos\left(sen(\vartheta)\right) + isen(sen(\vartheta))]$$

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\, sen(y))$$

log = logaritmo naturale