Il logaritmo di un numero negativo

Di Cristiano Armellini cristiano.armellini@alice.it

Quanto vale il Log(-5) ? Sappiamo che ha senso calcolare il logaritmo di numero positivi e non negativi.

Supponiamo che $\ln(-1) = a + ib$ allora (i è l'unità immaginaria e log o ln è il logaritmo naturale):

$$-1 = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$$

$$e^{ib} = \cos(b) + isen(b)$$

$$-1 = e^a\big(\cos(b) + isen(b)\big)$$

$$-1 = e^a \cos(b) + ie^a sen(b)$$

Allora deduco che $b = k\pi$ con k intero ($sen(k\pi) = 0$). Ma questo ci porta a $-1 = e^a \cos(k\pi)$. Quindi dato che $\cos(k\pi) = -1$ quando k dispari mentre $\cos(k\pi) = 1$ quando k pari , deduco che k deve essere dispari. Avremo $-1 = e^a(-1)$ quindi ***a = 0***.

Allora $\ln(-1) = ik\pi$ con k intero dispari. Allora $\ln(-5) = \ln(-1 * 5) = \ln(-1) + \ln(5) = \ln(5) + ik\pi$ con k intero dispari.

Volendo vedere la cosa da un'altra prospettiva

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + isen(\alpha)$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + isen(\pi) = 0 - 1 = -1$$

$$e^{ik\pi} = \cos(k\pi) + isen(k\pi) = \cos\,(k\pi)$$

Per k dispari $e^{ik\pi} = -1$

Per k pari $e^{ik\pi} = 1$ ovvero $ik\pi = \ln(1) = 0$ quindi ***k = 0***

In generale $log_a(-1) = \frac{ik\pi}{\log\,(a)}$ k intero dispari positivo.

Osservazione: se vogliamo conservare la proprietà che ***log(ab) = log(a) + log(b):***

$$\log(1) = 0 = \log(-1 * -1) = \log(-1) + log(-1) = ik_1\pi + ik_2\pi = 0$$

Implica che $k_1 = -k_2$ con $k_1. k_2$ dispari