La congettura di Collatz

Di Cristiano Armellini, cristiano.armellini@alice.it

La congettura di Collatz afferma che:

per ogni ***n*** intero positivo esiste un indice i tale che se $a_0 = n$, allora $a_i = 1$, ove

$f(n) = n/2$ ***n*** pari, $f(n) = 3n + 1$, *n* dispari e $a_i = n\ (i = 0), a_i = f(a_{i-1}), (i > 0)$

Ovvero dato il numero ***n*** la successione numerica che viene creata prima o poi terminerà con 1.

Dimostrazione:

Se $n = 2^k$ (***k*** pari o dispari) la conclusione è ovvia in quanto basterà dividere il numero ripetutamente per due finché non si arriva all'unità. In caso contrario $n \neq 2^k$la successione numerica che viene generata sarà costituita da numeri alternativamente pari e dispari finché esisterà un ***k*** (pari) e un ***m*** tali che

$10 * 2^k = 3m + 1$. Quest'ultima equazione diofantea , infatti, ha sempre infinite soluzioni intere per ***k*** pari (k = 0, k=2, k =4, …) ma non ha mai soluzioni intere per ***k*** dispari.

Esempio n = 6 abbiamo la sequenza 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. In questo caso il punto critico lo abbiamo per

k = 0, m = 3.

Una volta arrivati al punto critico per cui $10 * 2^k = 3m + 1$, con k pari si divide $10 * 2^k$ ripetutamente per 2 finché non si arriva al numero 5 quindi 16 = 3*5+1, 8 = 16/2, 4=8/2, 2=4/2, 1=2/2. Nel caso poi che $n = 10 * 2^k$ con (***k*** pari o dispari), si arriva sempre all'unità dividendo ripetutamente ***n*** per 2: alla fine si arriva alla sequenza già vista 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

La sequenza termina sempre in questo modo anche perché è da notare che c'è un' altra equazione diofantea $2^k = 3m + 1$ ammette infinite soluzioni intere positive ***k, m*** solo per valori di ***k*** pari e non ammette soluzioni quando ***k*** è dispari. La più piccola coppia di tali soluzioni è per ***m > 1***, ***k= 4, m = 5*** che corrisponde alla sequenza 16, 8, 4, 2, 1 finale sempre presente.

Altri esempi:

n = 7, 12, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40 = 2^2 * (10), 20, 10, 5, 16 = 2^4, 8, 4, 2, 1

n = 30, 15, 46, 23, 70, 35, 106, 33, 160 = 2^4 * (10) , 80, 40, 20, 10, 5, 16 =2^4, 8, 4, 2, 1

n = 18 , 9, 28, 14, 7, 12, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5,l 16, 8, 4, 2, 1

Quindi la sequenza numerica di Collatz apparentemente imprevedibile è regolata da ben due equazioni dionfantee $10 * 2^k = 3m + 1$, $2^k = 3m + 1$ (dove i valori di ***k, m*** non sono gli stessi per le due equazioni)