

La risoluzione algebrica delle equazioni di 5 grado o di grado superiore

Di Cristiano Armellini, cristiano.armellini@alice.it

Vogliamo risolvere l'equazione di 5 grado:

$$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$$

Dove A, B, C, D, E, F sono tutti interi. Già sappiamo che per conoscere le (eventuali) soluzioni razionali dobbiamo cercare tali soluzioni $x = h/k$, dove h è un divisore di F mentre k è un divisore di A (divisori positivi o negativi).

Detto ciò scriviamo

$$(a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4)(b_1x^2 + b_2x + b_3)$$

Ovvero cerchiamo di decomporre l'equazione di 5 grado in una di terzo e in un'altra di 2

$$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = (a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4)(b_1x^2 + b_2x + b_3)$$

Altri modi di effettuare la decomposizione sono : un'equazione di quarto grado e una di primo (ma in questo caso almeno una soluzione deve essere razionale).

Ricordiamo che le equazioni che possiamo risolvere per radicali sono quelle di secondo, terzo e quarto grado.

Svolgendo i calcoli ho

$$a_1b_1x^5 + (a_2b_1 + a_1b_2)x^4 + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3)x^3 + (a_4b_1 + a_3b_2 + a_2b_3)x^2 + (a_4b_2 + a_3b_3)x + a_4b_3 = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

(notare la disposizione degli indici)

Usando il principio di identità dei polinomi mi accorgo di avere 6 equazioni ma 7 incognite + la condizione (fondamentale) di interezza di tutte le incognite e di tutti i coefficienti dei polinomi. Quindi alla fine il problema non è tanto diverso dal risolvere un Sudoku dove bisogna con dei tentativi limitati indovinare i coefficienti interi a partire dalle relazioni date. Una volta fatto ciò basta risolvere per radicali un'equazione di III grado e una di II grado.

Il metodo può applicarsi facilmente ad una equazione di quarto grado ma non ad una di terzo a meno che quest'ultima non abbia almeno una radice razionale. Per un'equazione di 6 grado il metodo è ugualmente applicabile: infatti $6 = 4+2$, $6 = 5+1$ (ma deve esserci una almeno soluzione razionale), $6 = 3+3$. Qui i casi sono maggiori dunque l'algoritmo è più complesso. Più si aumenta il grado più la complessità aumenta.