Le equazioni esponenziali nel campo complesso

Di Cristiano Armellini, cristiano.armellini@alice.it

Si consideri l'equazione $a^x = b$ dove $a = m + in$. Sostituendo abbiamo che $(m + in)^x = b$. Possiamo scrivere il numero complesso usando la sua forma trigonometrica $(\rho(\cos(\theta) + isen(\theta))^x = b$ ovvero applicando la formule di De Moivre $\rho^x \cos(\theta x) + i\rho^x sen(\theta x) = b + i0$. quindi dovrà essere :

$$\rho^x \cos(\theta x) = b, \rho^x sen(\theta x) = 0$$

Nell'ipotesi che $\rho \neq 0$ $sen(\theta x) = 0$ ovvero $\theta x = k\pi$, $\theta = \frac{k\pi}{x}$

Se $\theta x = k\pi$ con k pari $\cos(\theta x) = \cos(k\pi) = 1$, quindi $\rho^x = b$, $x = \log_\rho b$. Se b > 0 abbiamo che x è reale , se b < 0 dobbiamo calcolare il logaritmo di un numero negativo che, come abbiamo mostrato in una precedente ricerca, è un numero complesso relativamente semplice da calcolare.

Se $\theta x = k\pi$ con k dispari $\cos(\theta x) = \cos(k\pi) = -1$, quindi- $\rho^x = b$, $x = \log_\rho(-b)$. Se b < 0 abbiamo che x è reale , se b > 0 dobbiamo calcolare il logaritmo di un numero negativo che, come abbiamo mostrato in una precedente ricerca, è un numero complesso relativamente semplice da calcolare.

Notiamo che se b fosse un numero $b = \mu\big(\cos(\omega) + isen(\omega)\big)$complesso avremo dovuto risolvere il seguente sistema:

$$\rho^x \cos(\theta x) = \mu \cos(\omega)\,, \rho^x sen(\theta x) = \mu sen(\omega)$$

Prendiamo ora in considerazione l'equazione $a^x = b$ con $x = m + in$. Avremo che

$$a^{m+in} = b$$

Ovvero $a^m a^{in} = b$, quindi $a^m e^{i\,\ln\,(\mathrm{a})} = b$, quindi:

$$a^m(\cos(n\ln(a)) + isen(n\ln(a)) = b + i0$$

Dovrà capitare che:

$$a^m \cos(n\ln(a)) = b, a^m sen(n\ln(a)) = 0$$

Sempre supponendo che a sia non nullo, dovrà capitare che $sen(n\ln(a)) = 0$ quindi $n\ln(a) = k\pi$, k intero

$n = \frac{k\pi}{\ln\,(a)}$ con ln(a) non nullo quindi $a \neq 1$

Se k fosse pari $\cos\bigl(nln(a)\bigr) = 1$, quindi da $a^m = b$ implica che $m = \log_a b$. Se b > 0 m è un numero reale

se b <0 dobbiamo calcolare il logaritmo di un numero negativo che è un numero complesso, come abbiamo

già ricordato sopra.

Se k fosse dispari $\cos\left(nln(a)\right) = -1$, quindi $a^m(-1) = b$ da cui $m = \log_a(-b)$. Se b < 0 m è un numero reale se b > 0 dobbiamo calcolare il logaritmo di un numero negativo che è un numero complesso, come abbiamo già ricordato sopra.

Nota se anche b fosse complesso avremo dovuto risolvere il sistema di equazioni :

$$a^m(\cos\left(n\ lon(a)\right) = \mu\cos(\omega)\,, a^m\cos(n\ln(a)) = \mu sen(\omega).$$

Note sull'ipotesi di Riemann

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^{a+ib}} = \frac{1}{n^a(\cos(b\ln(n)) + isen(b\ln\,(n)))} = \frac{\cos\left(b\ ln(n)\right) - isen(b\ln(n))}{n^a}$$

Allora:

$$\sum\frac{1}{n^s} = \sum\nolimits_n\frac{\cos\,(b\ln(n))}{n^a} - i\sum_n\frac{sen(b\ln(n))}{n^a} = 0 + i0$$

Per trovare gli zeri della funzione zeta di Riemann basterà risolvere il sistema di equazioni:

$$\sum_n\frac{\cos\,(b\ln(n))}{n^a} = 0\,, \sum_n\frac{sen(b\ln(n))}{n^a} = 0$$

Ove come sempre ln = logaritmo naturale ovvero logaritmo in base n e dove ho applicato che

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + isen(\alpha), e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - isen(\alpha)$$