Le equazioni diofantee

Di Cristiano Armellini (cristiano.armellini@alice.it)

Partiamo da un generica equazione diofantea di secondo grado ove ***x, y*** devono essere interi:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0(+)$$

Ovvero:

$$ax^2 + x(by + d) + cy^2 + ey + f = 0$$

Dobbiamo imporre che

$$(by + d)^2 - 4a(cy^2 + ey + f) > 0$$

Ovvero:

$$y^2(b^2 - 4ac) + y(2bd - 4ac) + d^2 - 4af > 0\ (*)$$

Siano $y_{1,}y_2$ soluzioni di (*) con $y_1 < y_2$, Ponendo $\Delta = (2bd - 4ac)^2 - 4(b^2 - 4ac)(d^2 - 4af)$

Abbiamo tra casi:

a) $\Delta > 0, b^2 - 4ac > 0 => y > y_2, y < y_1$

b) $\Delta > 0\ b^2 - 4ac < 0 => \ y_1 < y < y_2$

c) $\Delta < 0$, no soluzioni

Se nell'equazione (+) poniamo $y = x + d$ allora diventa:

$$x^2(a + b + c) + x(bd + e + 2cd + d) + cd^2 + ed + f = 0$$

E per l'esistenza delle radici deve essere

$$\Delta = (bd + e + 2cd + d)^2 - 4(a + b + c)(cd^2 + ed + f) > 0$$

Dalla quale posso facilmente ricavare un campo di valori in cui far variare ***d (intero positivo o negativo).***

Come caso particolare consideriamo l'equazione $x^2 + y^2 = p$

$$y^2 = p - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{p - x^2}$$

Ovvero: $-\sqrt{p} < x < \sqrt{p}$

Se invece $y = x + d$ arriviamo facilmente a $2x^2 + 2xd + d^2 - p = 0$ ovvero: $-\sqrt{2p} < d < \sqrt{2p}$

Nota se **p** primo **p** deve essere della forma ***p = 4n+1*** per qualche ***n*** intero positivo