Logaritmi e disuguaglianze

Di Cristiano Armellini (cristiano.armellini@alice.it)

Dalla ben nota relazione $(x+y) \geq 2\sqrt{xy}$ (relazione tra media geometrica e media aritmetica) passando al logaritmo (di qualunque base > 1) entrambi i membri ottengo:

$$\log(x+y) \geq \log(2) + \log(\sqrt{xy}) = \log(2) + \log(\sqrt{x}) + \log(\sqrt{y}) =$$

$$= \log(2) + \frac{1}{2}\log(x) + \frac{1}{2}\log(y)$$

Questo è possibile farlo perché la funzione logaritmo è monotona crescente.

$$\log(\sqrt{x+y}) = \frac{1}{2}\log(x+y) \geq [\log(2) + log\sqrt[4]{x} + log\sqrt[4]{y}]$$

quindi

$$\sqrt{x+y} \geq \sqrt{2}\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}$$

Già sappiamo che

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

E' anche facile provare che $\sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$ per ogni intero n maggiore o uguale a 2.

In generale se $(x+y) \geq 2\sqrt{xy}$ allora $(x+y)^n \geq 2^n (xy)^{n/2}$. Passando quindi ai logaritmi e supponendo che x+y > 0 e x > 1, y > 1 abbiamo:

$$log(x+y)^n \geq \log\left(2^n (xy)^{\frac{n}{2}}\right)$$

$$n\, log(x+y) \geq n\, log(2) + \frac{n}{2}\log(x) + \frac{n}{2}\log(y)$$

$$n \log(x+y) \geq log(2^n) + \log((xy)^{n/2})$$

Ovvero passando all'esponenziale (x > 1, y > 1):

$$(x+y)^n \geq 2^n x^{n/2} y^{n/2}$$

$$(x+y)^n \geq 2^n \sqrt{x^n}\sqrt{y^n}$$

Nell'ipotesi che n = 1/m con m intero (x > 1, y > 1):

$$(x+y)^{1/m} \geq 2^{1/m}\sqrt{x^{1/m}}\sqrt{y^{1/m}}$$

$$\sqrt[m]{x+y} \geq \sqrt[m]{2}\ \sqrt[2m]{x}\ \sqrt[2m]{y}$$

Questo, come detto se x > 1 e y >1 se 0 < x + y < 1, il verso della disequazione cambia quindi occorre sostituire il maggiore con il minore.

Ovvero per 0 < x+y < 1

$$(x+y)^n \leq 2^n \sqrt{x^n}\sqrt{y^n}$$

$$\sqrt[m]{x+y} \leq \sqrt[m]{2}\ \sqrt[2m]{x}\ \sqrt[2m]{y}$$

Infatti è anche:

$$\log(\mathrm{x}+\mathrm{y})^{\mathrm{n}} = \mathrm{n}\log(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \geq \mathrm{n}[\log(2) + \log(\sqrt{\mathrm{x}}) + \log(\sqrt{\mathrm{y}})]$$

quindi $(x+y)^n \geq 2^n \sqrt{x^n}\sqrt{y^n}$

Per generalizzare al caso di più variabili basta sostituire nelle formule trovate

$$x = x_1 + x_2, \qquad y = y_1 + y_2$$

E riapplicare le disuguaglianze già discusse nel caso di due variabili.

Ad esempio: $(x+y+z+w)^n \geq 2^{2n} x^{n/4} y^{n/4} z^{n/4} w^{n/4}$

Nota:

se

$$A = \frac{x_{1+}x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_{2\ldots\ldots} x_n}$$

Vale che G < A. Passando ai logaritmi in entrambi i membri della disuguaglianza ho che

$$\log(x_1) + \cdots \ldots + \log(x_n) \leq n\, log(x_1 + \cdots + x_n) - n\log(n)$$