# Nuove formule trigonometriche

Di Cristiano Armellini (cristiano.armellini@alice.it )

Un noto problema è quello di calcolare esattamente in coseno o il seno di un angolo senza quindi ricorrere alle tecniche dell'analisi numerica o dell'analisi matematica che inevitabilmente ci porterebbero a delle soluzioni approssimate. Misuriamo gli angoli in radianti.

Per la formule di De Moivre $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + isen(n\theta), z = \rho(\cos(\theta) + isen(\theta))$.

Allora $\cos(4\theta) + isen(4\theta) = (\cos(\theta) + isen(\theta))^4$ svolgendo i calcoli e le opportune semplici semplificazioni otteniamo l'importante relazione $\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta)$-$8cos^2(\theta) + 1$, dal momento che $i^2 = -1, cos^2(\theta) + sen^2(\theta)$=1. Ponendo $t = cos^2(\theta)$ perveniamo alla seguente equazione biquadratica trigonometrica:

$$8t^4 - 8t^2 + 1 = \cos(4\theta)\,, t = cos^2(\theta)$$

Consideriamo gli angoli $\theta = \pi/4^k$ per k = 2, 3, 4, …. Dall'equazione biquadratica è facile calcolare il cos $(\theta)$ fissando un k, avendo già calcolato al passo k-1. Esempio per k = 2 , $\theta = \frac{\pi}{4^2}, 4\theta = \pi/4$ che conosco.

Per k = 3 $\theta = \frac{\pi}{4^3}, 4\theta = \pi/4^2$che ho già calcolato al passo precedente risolvendo l'equazione biquadratica.

Quindi posso calcolare esattamente  il valore di $\theta = \pi/4^k$ per k =  2, 3, 4,.. in modo iterattivo partendo dal valore di k minore.

In realtà con lo stesso procedimento si possono calcolare anche gli angoli della forma $\theta = \pi/4k$ a patto però di conoscere il valore del coseno o del seno di $\theta = \pi/k$

Un altro sistema consiste nell'usare le  ben note formule si somma e sottrazione

$$sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + \cos(a)\,sen(b)$$

$$sen(a-b) = sen(a)\cos(b) - \cos(a)\,sen(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\,cos(b) - sen(a)sen(b)$$

Posso calcolare il coseno e il seno di nuovi angoli sommando o sottraendo a due a due per tutte le combinazioni possibili gli angoli $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{10}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, ..$ di cui conosciamo il coseno e il seno (sono riportati esattamene in tutti i testi di trigonometria) anche come conseguenza di importanti considerazioni di tipo geometrico. Vale la pena di ricordare che se ho un insieme di n elementi le combinazioni di n elementi presi due a due sono $C_{n,k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{2(n-2)!}}$ che comunque è un numero elevato e il metodo in generale non è molto pratico

Passiamo allora alla descrizione di un altro sistema. Vogliamo calcolare il $\cos\left(\frac{m}{n}\pi\right)$ dove senza perdere di generalità supponiamo che m < n e che MCD(m, n) = 1 (ci si può sempre ricondurre a questo caso). Il coseno di un angolo è una funzione periodica $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)$ quindi consideriamo due casi importanti:

$$\frac{m}{n}\pi = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + 2k\pi = \frac{(a+b)\pi + 2k\pi ab}{ab}$$

Allora dobbiamo trovare a, b interi o razionali tali che

$$n = ab$$

$$m = (a+b) + 2kn$$

Questo ci porta a risolvere una equazione di II grado in a o in b con parametro k che è un intero (positivo , negativo o nullo).

L'altro caso sfrutta la proprietà che $\cos((2k+1)\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ quindi

$$\frac{m}{n}\pi = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + (2k+1)\pi = \frac{(a+b)\pi + ab(2k+1)\pi}{ab}$$

Che porta a :

$$n = ab$$

$$m = (a+b) + (2k+1)n$$

Che come nel caso precedente porta a una equazione di II grado in a o in b con parametro K intero (positivo o negativo) variabile.

Risolvendo al variare di K (imponendo il delta > 0) si cercheranno le soluzioni intere o razioni e come nel caso precedente se conosciamo il $\cos\left(\frac{\pi}{a}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{b}\right)$ troviamo il $\cos\left(\pi\frac{m}{n}\right)$.