Osservazioni e note su alcune equazioni diofantee

Di Cristiano Armellini, cristiano.armellini@alice.it

Si voglia studiare l'equazione diofantea $\boldsymbol{a^3 + b^3 = M}$ con ***a, b, M*** intere. Per risolvere questa equazione in teoria basterebbe cercare le soluzioni intere ponendo

$$b = \sqrt[3]{M - a^3}$$

Facendo variare a finché anche non è un intero, eventualmente ponendo ***b > 0*** per restringere il range delle soluzioni.

Vediamo qualche altro metodo più sofisticato

Sappiamo che $(a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + b^3 = M$

Quindi

$$ab = \frac{(a + b)^3 - M}{3(a + b)}$$

Ora sappiamo che le soluzioni dell'equazione di II grado $x^2 - sx + n = 0$ con ***n = ab, s = a+b***.

Quindi

$$x^2 - sx + \frac{s^3 - M}{3s} = 0$$

Allora basta far variare il parametro ***s*** negli interi finché non si ottengono soluzioni intere ***x***

$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4(\frac{s^3 - M}{3s})}}{2}$$

Ovviamente il delta deve essere maggiore di zero

$$\frac{3s^3 - 4(s^3 - M)}{3s} > 0$$

Ovvero per $0 < s < \sqrt[3]{4M}$

Si voglia ora studiare l'equazione diofantea $\boldsymbol{a^2 + b^2 = M}$. Anche qui è possibile cercare le soluzioni come

$a = \pm\sqrt{M - b^2}$ con $M - b^2 > 0$ con parametro intero variabile ***b***.

Vediamo un altro metodo.

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2 = M$$

Quindi

$$ab = \frac{(a + b)^2 - M}{2}$$

Allora consideriamo l'equazione di II grado $x^2 - sx + n = 0, n = ab, s = a + b, x = a, b$

$$x^2 - sx + \frac{s^2 - M}{2} = 0$$

Anche qui poniamo il delta > 0

$$s^2 - 4\left(\frac{s^2 - M}{2}\right) > 0$$

Ovvero $-\sqrt{2M} < s < \sqrt{2M}$ o se volgiamo che ***s > 0***, $0 < s < \sqrt{2M}$.

Osserviamo che se ***M*** è primo ***M*** deve essere della forma ***M = 4l+1*** per qualche l intero positivo.

Consideriamo ora l'equazione $\boldsymbol{a^3 - b^3 = M}$. Anche qui possiamo scrivere $a = \sqrt[3]{M + b^3}$ e procedere come detto altre volte.

Tuttavia $M = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^{2)}$. Questo implica che a-b | M ovvero che deve esistere un k intero tale che $M = k(a - b)$. Allora $a = \frac{M}{k} + b$ e possiamo sostituire a nell'equazione $a^3 - b^3 = M$ ottenendo una equazione algebrica di II grado nella variabile ***a***. In generale si sarebbe potuto considerare anche l'equazione più generale $\boldsymbol{M = a^n - b^n} = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots)$. Infatti anche qui (a-b) | M.

In una equazione algebrica di grado n è sempre possibile trovare tutte le soluzioni intere infatti basta considerare i divisori del termine noto e quelli del grado direttore (del termine con il grado più elevato), fare tutti i possibili rapporti (considerando anche il segno) e quindi tra le soluzioni intere ottenute verificare quelle che soddisfano l'equazione algebrica.

Questo metodo si applica anche a $\boldsymbol{a^n + b^n = M}$ ma solo quando ***n*** è dispari perché per ***n*** dispari:

$$M = a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots .)$$

Dunque ***a + b | M.*** e si prosegue come sopra.

Consideriamo ore l'equazione $\boldsymbol{a^n + b^n = M}$. Se ***n*** pari $a = \pm\sqrt[n]{M - b^n}$, $M - b^n > 0$. Se n dispari $a = \sqrt[n]{M - b^n}$ e considerare b come parametro ***b*** variabile.

Tuttavia:

$$(a^{n/2})^2 + (b^{n/2})^2 = M$$

$$(a^{n/3})^3 + (b^{n/3})^3 = M$$

Quindi nel caso che n sia divisibile per 2 o per 3 ci si può facilmente ricondurre a un caso già visto e studiato precedentemente con .