

Analisi complessa trigonometria e logaritmi

Di Cristiano Armellini (cristiano.armellini@alice.it)

Logaritmo di un numero negativo

Sappiamo che $e^{\pi i} = -1$, quindi $\ln(-1) = \pi i$ ovvero $\ln\left(\frac{-k}{k}\right) = \pi i$ con k positivo. Questo implica che

$\ln(-k) - \ln(k) = \pi i$, cioè $\ln(-k) = \ln(k) + \pi i$ con k positivo. Questa rappresenta la formula

principale del logaritmo di un numero negativo che è un numero complesso.

Trigonometria complessa

Dalla ben nota relazione $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha)$ ponendo $\alpha = bi$ otteniamo (i unità immaginaria):

$e^{ibi} = e^{-b} = \cos(bi) + i\text{sen}(bi)$, quindi per l'uguaglianza dei numeri complessi

$\text{sen}(bi) = 0, \cos(bi) = e^{-b}$. Facciamo ora attenzione: $e^{i(-\alpha)} = \cos(-\alpha) + i\text{sen}(-\alpha) = \cos(\alpha) - i\text{sen}(\alpha)$.

Questo vuol dire che $e^{i(-ib)} = e^b = \cos(-ib) + i\text{sen}(-ib)$, ovvero $\cos(-ib) = e^b, \text{sen}(-ib) = 0$. Dunque

con i numeri complessi non valgono le proprietà note per i reali del tipo $\cos(-a) = \cos(a)$, oppure

$\text{sen}(-a) = -\text{sen}(a)$.

Scoperto ciò per calcolare il coseno di un numero complesso basterà applicare le formule della somma e della sottrazione già note per il coseno e il seno. Ad esempio:

$\cos(a + ib) = \cos(a)\cos(ib) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(ib) = \cos(a)e^{-b}$. Con questo metodo si possono calcolare il seno, coseno, tangente ecc di un qualunque numero complesso.

Il logaritmo in base complessa di un numero complesso

Sia $\log_{\rho(\cos(\theta)+isen(\theta))}(\mu(\cos(\alpha)+isen(\alpha))) = y$, dovrà essere:

$\rho^y(\cos(\theta y) + isen(\theta y)) = \mu(\cos(\alpha) + isen(\alpha))$, quindi per l'uguaglianza dei numeri complessi,

dovrà capitare che: $\rho^y = \mu, \cos(\theta y) = \cos(\alpha), \operatorname{sen}(\theta y) = \operatorname{sen}(\alpha)$, ovvero, a meno della periodicità di

sen e coseno basterà che $\rho^y = \mu, \theta y = \alpha$. In questa condizioni il logaritmo in base complessa di un

numero complesso è un numero reale. Si noti che y fosse stato un numero complesso avremo

dovuto affrontare il problema della potenza complessa di un numero complesso, tema che abbiamo

già affrontato in un precedente articolo.